

Fyzikálna olympiáda

52. ročník

školský rok 2010/2011

Kategória D

Úlohy krajského kola - riešenie

(ďalšie informácie na <http://fpv.uniza.sk/fo> a www.olympiady.sk)

1. Hornet

Na lietadlo pôsobí hlavne ťah motorov (odporové a trecie sily zanedbávame). Pre zrýchlenie lietadla teda platí $a_1 = T / m$. Čas potrebný na dosiahnutie rýchlosti $v_{\min}$ je potom

$$t_1 = \frac{v_{\min}}{a_1} = \frac{m v_{\min}}{T}.$$

Keďže ide o rovnomerne zrýchlený pohyb, platí

$$L_1 = \frac{1}{2} v_{\min} t_1 = \frac{m v_{\min}^2}{2T} = 402 \text{ m.} \quad \textbf{2 body}$$

Pre veľkosť dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu platí:

$$L_2 = \frac{1}{2} v_{\min} t_2,$$

odkiaľ

$$t_2 = \frac{2L_2}{v_{\min}} = 4,32 \text{ s.} \quad \textbf{3 body}$$

Zrýchlenie lietadla je potom

$$a_2 = \frac{v_{\min}}{t_2} = \frac{v_{\min}^2}{2L_2} \approx 16,07 \text{ m.s}^{-2} = 1,64 g. \quad \textbf{3 body}$$

Na lietadlo pôsobia v tom istom smere ťažná sila katapultu a ťah motorov, teda platí

$$m a_2 = F + T,$$

odkiaľ

$$F = m a_2 - T = 302 \text{ kN.} \quad \textbf{2 body}$$

2. Padajúci kameň

Pre okamžitú rýchlosť a dráhu voľného pádu platia vzťahy $v = g t$, resp. $h = g t^2 / 2$. Z druhej rovnice určíme celkový čas pádu kamienka

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2,02 \text{ s} \quad \textbf{1 bod}$$

a po dosadení do prvej rovnice určíme rýchlosť dopadu

$$v = g t = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} = 19,8 \text{ m.s}^{-1}. \quad \textbf{1 bod}$$

Za poslednú sekundu pohybu ($\Delta t = 1 \text{ s}$) preletel kamienok vzdialenosť

$$s = h - \frac{1}{2} g (t - \Delta t)^2 = h - \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - \Delta t \right)^2 = 14,9 \text{ m.} \quad \textbf{2 body}$$

Priemerná rýchlosť kamienka počas celého pádu je

$$v_1 = \frac{h}{t} = \sqrt{\frac{gh}{2}} = 9,9 \text{ m.s}^{-1}. \quad \textbf{2 body}$$

Aby sme určili priemernú rýchlosť v_2 kamienka na druhej polovici jeho dráhy, musíme najskôr určiť čas t_2 , za ktorý túto dráhu preletel. Zrejme $t_2 = t - t_1$, kde t je celková doba pádu a t_1 je čas, za ktorý kamienok preletí prvú polovicu svojej dráhy. Platí $h/2 = gt_1^2/2$, odkiaľ

$$t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Potom

$$t_2 = t - t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{h}{g}}(\sqrt{2} - 1). \quad \text{2 body}$$

Priemerná rýchlosť v_2 kamienka na druhej polovici jeho dráhy je potom

$$v_2 = \frac{h}{2t_2} = \frac{\sqrt{gh}}{2(\sqrt{2} - 1)} \approx 16,9 \text{ m.s}^{-1}. \quad \text{2 body}$$

3. Star Trek

Pri obiehaní družice okolo planéty na ňu pôsobí gravitačná príťažlivá sila, ktorá spôsobuje jej pohyb po kružnici. Môžeme ju preto vyjadriť ako silu dostredivú a platí

$$G \frac{Mm_d}{r^2} = m_d \omega^2 r, \quad \text{2 body}$$

kde G je gravitačná konštanta, M je hmotnosť planéty, m_d je hmotnosť družice, r je polomer obežnej dráhy družice a ω je uhlová rýchlosť družice. Pre uhlovú rýchlosť platí $\omega = 2\pi/T$, kde T je perióda obehu družice a pre polomer obežnej dráhy platí podľa zadania $r = kR$, kde R je polomer planéty. Z tejto rovnice po dosadení za r a ω vyjadríme hmotnosť planéty

$$M = \frac{4\pi^2 k^3 R^3}{GT^2}. \quad \text{2 body}$$

Ak má planéta guľový tvar a polomer R , tak pre jej hustotu platí

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}. \quad \text{2 body}$$

Po dosadení za M dostaneme pre hustotu planéty výsledný vzťah

$$\rho = \frac{3\pi k^3}{GT^2} = 3,01 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}. \quad \text{4 body}$$

4. Bójka

- a) V stave rovnováhy pôsobia na bójku sily jej tiaže, vztlaková sila a sila ťahu lanka, pričom platí

$$F = \rho \frac{3V}{4} g - m_1 g = \rho \frac{3m_1}{4\rho_1} g - m_1 g = \left(\frac{3\rho}{4\rho_1} - 1 \right) m_1 g = 40,2 \text{ N.} \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- b) V stave rovnováhy pôsobí na závažie ťahová sila lanka F_2 , tiažová sila závažia a vztlaková sila na závažie. Ťahová sila lanka je daná silou F na hornom konci zmenšenou o rozdiel tiažovej a vztlakovej sily lanka.

$$F_2 = F - \mu H g + \rho V_L g = F - \mu H g + \rho \frac{\mu H}{\rho_o} g = \left(\frac{3\rho}{4\rho_1} - 1 \right) m_1 g - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_o} \right) \mu H g.$$

Pre minimálnu hmotnosť závažia platí

$$m_2 = \frac{1}{g} (F_2 + \rho V_2 g) = \left(\frac{3\rho}{4\rho_1} - 1 \right) m_1 - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_o} \right) \mu H + \frac{\rho}{\rho_o} m_2,$$

odkiaľ dostaneme

$$m_2 = \frac{\rho_o}{\rho_o - \rho} \left(\frac{3\rho}{4\rho_1} - 1 \right) m_1 - \mu H = 2,72 \text{ kg.} \quad \mathbf{6 \text{ bodov}}$$

Pozn.: Ak riešiteľ neuvažuje vztlakovú silu na oceľové lanko a závažie, dostane výsledok

$$m_2 = \frac{F}{g} - \mu H = 2,1 \text{ kg.} \quad \text{potom za časť b) iba 3 body.}$$